

معادلات التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة:

$$p(x)dx + q(y)dy = 0 \quad \text{الشكل العام لا ص}$$

حيث  $dx$  متغير مستقل و  $dy$  تابع مستقل و

ل هذه المعادلة تكامل الطرفين فنجد

$$\int p(x)dx + \int q(y)dy = C$$

وهو الحل العام

أنواع المعادلات ذات المتغيرات المنفصلة

لنوع الأول:

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$$

المعادلة التفاضلية التي تأخذ الشكل التالي

ومنه

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)dx$$

بالمكاملة

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x)dx + C$$

مثال (1)

حل المعادلة  $y' = x \cdot y$  ذات متغيرات منفصلة و يوجد حل عام

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = x \cdot y$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{y} = x dx$$

نحسب ذات متغيرات منفصلة  
بالمكاملة نجد

$$\Rightarrow \ln y = \frac{1}{2} x^2 + \ln C$$

$$\Rightarrow \ln y - \ln C = \frac{1}{2} x^2$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y}{C} = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow y = C e^{\frac{1}{2} x^2}$$

وهو الحل العام



$$M(x)N(y)dx + P(x)Q(y)dy = 0$$

المعادلة التفاضلية التي تأخذ الشكل

نقسم الطرفين على  $P(x)N(y)$

$$\frac{M(x)}{P(x)} dx + \frac{Q(y)}{N(y)} dy = 0$$

ونكامل مُجدد

$$\int \frac{M(x)}{P(x)} dx + \int \frac{Q(y)}{N(y)} dy = C$$

مثال ٦

$$x(y^2-1)dx + y(x^2-1)dy = 0$$

وجد الحل العام للمعادلة

الحل:

نقسم طرفي المعادلة التفاضلية على  $(x^2-1)(y^2-1)$

$$\frac{x}{x^2-1} dx + \frac{y}{y^2-1} dy = 0$$

فنصل على المعادلة التفاضلية ذات المتغيرات المنفصلة

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ ٢

$$\frac{2x}{x^2-1} dx + \frac{2y}{y^2-1} dy = 0$$

ونكامل مُجدد

$$\ln(x^2-1) + \ln(y^2-1) = \ln C$$

$$\ln(x^2-1)(y^2-1) = \ln C$$

$$(x^2-1)(y^2-1) = C$$

٧) وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(x^2-yx^2)y' + y^2 + xy^2 = 0$$

الحل:

$$(x^2-yx^2) \frac{dy}{dx} + y^2 + xy^2 = 0$$

$$x^2 dy - yx^2 dy + y^2 dx + xy^2 dx = 0$$

نقسم على  $x^2 y^2$



$$\frac{dy}{y^2} - \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x^2} + \frac{dx}{x} = 0$$

تكمّل الطرفين مُجددًا ؟

$$-\frac{1}{y} - \ln(y) - \frac{1}{x} + \ln x = \ln(c)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \ln(c)$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{y+x}{xy} + \ln(c)$$

$$e^{\ln\left(\frac{x}{y}\right)} = e^{\frac{y+x}{yx} + \ln(c)}$$

$$\frac{x}{y} = c \cdot e^{\frac{y+x}{yx}}$$

وهو الحل العام المطلوب

مَرِن (8)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية :

$$y dx - x dy = x y dx$$

كل

$$\frac{dx}{x} - \frac{dy}{y} = dx$$

نقسم على  $xy$

$$\frac{dy}{y} = \frac{dx}{x} - dx$$

$$\ln y = \ln x - x + \ln c \Rightarrow y = c x e^{-x}$$

لمعادلات التفاضلية التي تُرَدُّ إلى معادلات تفاضلية ذات متغيرات منفصلة

$$y' = f(ax + by + c) \quad \text{من الشكل}$$

مَرِن

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $y' = x - y$

كل

$$y' = x - y$$

نُفَضِّ  $z = x - y \Leftrightarrow y = x - z \Leftrightarrow y' = 1 - z'$  نفوض بالمعادلة

$$1 - z' = z \Rightarrow z' = 1 - z \Rightarrow \frac{dz}{dx} = 1 - z \Rightarrow \frac{dz}{1-z} = dx$$

$$\ln(1-z) = -x + \ln c$$

$$-70 \Rightarrow 1-z = c e^{-x}$$



أوجد الحل العام للمعادلة:

$$(y^3 + y - 2) dx + xy dy - 5y dy = 0$$

إن هذه المعادلة ذات متغيرات منفصلة لأننا نكتبها بالشكل

$$(y^3 + y - 2) dx = -xy dy + 5y dy$$

ومنه

$$(y^3 + y - 2) dx = -(x - 5)y dy$$

$$\frac{dx}{x-5} = \frac{-y}{y^3 + y - 2} dy \quad *$$

ملكاملة الطرفين نخرج الكسر الموجود على الطرف اليمين بالشكل

$$\frac{-y}{y^3 + y - 2} = \frac{-y}{(y-1)(y^2 + y + 2)} = \frac{A}{y-1} + \frac{By + C}{y^2 + y + 2}$$

بتوسيع المقامات وحذف وبعد إجراء المطابقة نجد

$$A = -\frac{1}{4} \quad B = \frac{1}{4} \quad C = -\frac{1}{2}$$

$$\frac{-y}{y^3 + y - 2} = \frac{-1}{4(y-1)} + \frac{y-2}{4(y^2 + y + 2)}$$

$$= \frac{-1}{4(y-1)} + \frac{1}{8} \frac{2y+1-5}{y^2 + y + 2}$$

$$= -\frac{1}{4} \frac{1}{(y-1)} + \frac{1}{8} \frac{2y+1}{y^2 + y + 2} - \frac{5}{8} \frac{1}{y^2 + y + 2}$$

$$\frac{dx}{x-5} = \left( -\frac{1}{4} \frac{1}{y-1} + \frac{1}{8} \frac{2y+1}{y^2 + y + 2} - \frac{5}{8} \frac{1}{y^2 + y + \frac{1}{4} + \frac{7}{4}} \right) dy \quad \text{نقوض ج} *$$

$$\ln|x-5| = -\frac{1}{4} \ln|y-1| + \frac{1}{8} \ln|y^2 + y + 2| - \frac{5 \cdot 2}{8 \sqrt{7}} \arctan \frac{y+1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C$$

$$- \frac{5}{4\sqrt{7}} \arctan \frac{y+1}{\frac{\sqrt{7}}{2}} \quad \text{وهو الحل العام}$$



المعادلات التفاضلية المتجانسة

المعادلات التفاضلية المتجانسة يمكننا دائماً كتابتها بالشكل

$$y' = \frac{dy}{dx} = g\left(\frac{y}{x}\right)$$

ونستطيع تبسيطها بأدخال دالة جديدة بالشكل  $y = ux \Leftrightarrow u = \frac{y}{x}$

$$\Rightarrow dy = x du + u dx$$

ونعوض في فتصبح فتصبح المعادلة ذات متغيرات منفصلة وسهل حلا

مثال: (١٥)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $x y' - x e^{\frac{y}{x}} - y = 0$

كل

بالعامة على  $x$  نجد

$$y' - e^{\frac{y}{x}} - \frac{y}{x} = 0$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + e^{\frac{y}{x}} \Rightarrow dy = \frac{y}{x} dx + e^{\frac{y}{x}} dx$$

نفرض  $y = ux \Leftrightarrow u = \frac{y}{x}$

نعوض بالمعادلة

$$x du + u dx = u dx + e^u dx$$

$$x du = e^u dx$$

$$\frac{dx}{x} = e^{-u} du$$

نكامل الطرفين

$$\ln x = -e^{-u} + C$$

$$\ln x = -e^{-\frac{y}{x}} + C$$



تمرين (11)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x \cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = y \cos \frac{y}{x} - x$$

هذه المعادلة متجانسة لذا نكتبها بالشكل  $y(\frac{y}{x})$

نقسم طرفيها على  $x$

$$\cos \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} - 1$$

$$\cos \frac{y}{x} dy = \frac{y}{x} \cos \frac{y}{x} dx - dx$$

$$dy = x du + u dx \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow u = \frac{y}{x}$$

نعوض

$$\cos u (x du + u dx) = u \cos u dx - dx$$

$$x \cos u du + u \cos u dx = u \cos u dx - dx$$

$$x \cos u du = - dx$$

$$dx + x \cos u du = 0$$

$$\frac{dx}{x} + \cos u du = 0$$

نكامل

$$\ln x + \sin u = \ln C$$

$$x e^{\sin u} = C$$

$$x e^{\sin \frac{y}{x}} = C$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية



$$a_1 \alpha + b_1 \beta + c_1 = 0$$

$$a_2 \alpha + b_2 \beta + c_2 = 0$$

وبحل حيلة المعادلات ② نجد إحداثيات  $M$

ثم نجرب التحويل

$$\begin{aligned} dx &= dX & \Leftarrow & x = X + \alpha \\ dy &= dY & \Leftarrow & y = Y + \beta \end{aligned}$$

فبدل في المعادلة ①

$$\frac{dY}{dX} = f\left(\frac{a_1 X + b_1 Y}{a_2 X + b_2 Y}\right)$$

ونوجد الحل العام

ثم نفوض  $X$  :  $x - \alpha$  و  $Y$  :  $y - \beta$  في معادلة الحل العام

نرى (12)

وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{y-x}{2y-x+1} \quad (1)$$

$$D_1 : y - x = 0$$

$$D_2 : 2y - x + 1 = 0$$

ومنه نرى  $M(\alpha, \beta)$  نقطة التقاطع ونوجد

المستقيمان متقاطعان لأن  $D_1 \times D_2$

$$\begin{cases} \beta - \alpha = 0 \\ 2\beta - \alpha + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = -1$$

نجرب التحويل

$$\begin{aligned} dx &= dX & \Leftarrow & x = X - 1 \\ dy &= dY & \Leftarrow & y = Y - 1 \end{aligned}$$

-75-



موضوع بالمعادلة التفاضلية ①

$$\frac{dY}{dX} = \frac{Y-1-X+1}{2Y-2X+1+1} = \frac{Y-X}{2Y-X}$$

نقسم على X

$$\frac{dY}{dX} = \frac{\frac{Y}{X} - 1}{\frac{2Y}{X} - 1} \Rightarrow dY = \frac{\frac{Y}{X} - 1}{\frac{2Y}{X} - 1} dX \quad ②$$

$$\Leftarrow Z = \frac{Y}{X} \text{ نفرض}$$

موضوع ②

$$dY = Z dX + X dZ \Leftarrow Y = ZX$$

$$Z dX + X dZ = \frac{Z-1}{2Z-1} dX$$

$$\left( \frac{Z-1}{2Z-1} - Z \right) dX = X dZ$$

$$\frac{Z-1-2Z^2+Z}{2Z-1} dX = X dZ$$

$$\frac{dX}{X} = \frac{2Z-1}{-2Z^2+2Z-1}$$

نضرب طرفي المعادلة التفاضلية بـ -2

$$-2 \frac{dX}{X} = \frac{+4Z-2}{2Z^2-2Z+1}$$

بالمكاملة

$$-2 \ln X = \ln(2Z^2-2Z+1) + \ln c$$

$$\frac{1}{X^2} = c(2Z^2-2Z+1) \Rightarrow \frac{1}{X^2} = c \left( 2 \left( \frac{Y}{X} \right)^2 - 2 \frac{Y}{X} + 1 \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(X+1)^2} = c \left[ 2 \left( \frac{Y+1}{X+1} \right)^2 - 2 \left( \frac{Y+1}{X+1} \right) + 1 \right]$$



سب (13)

وجد الكل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = \frac{2x + 2y + 1}{x + y + 3}$$

الكل

$$D_1: 2x + 2y + 1 = 0$$

$$D_2: x + y + 3 = 0$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

المستويان متوازيان

$$y' = \frac{2(x+y) + 1}{x+y+3}$$

$$dy = dz - dx \quad \Leftrightarrow \quad y = z - x \quad \Leftrightarrow \quad z = x + y \quad \text{لتعويض}$$

نعوض

$$dy = \frac{2(x+y) + 1}{x+y+3} dx$$

$$dz - dx = \frac{2z + 1}{z + 3} dx \Rightarrow dx + \frac{2z + 1}{z + 3} dx = dz$$

$$\frac{3z + 4}{z + 3} dx = dz \Rightarrow dx = \frac{z + 3}{3z + 4} dz$$

$$dx = \frac{1}{3} \frac{3z + 4 + 5}{3z + 4} dz \Rightarrow dx = \frac{1}{3} dz + \frac{5}{3} \frac{dz}{3z + 4}$$

بالمكاملة

$$x = \frac{1}{3} z + \frac{5}{9} \ln(3z + 4) + C$$

$$x = \frac{1}{3} (x + y) + \frac{5}{9} \ln(3x + 3y + 4) + C$$

وهو الكل العام



رسم (14)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية  $(2x + 3y + 2) dy = (4x + 6y + 4) dx$

كل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x + 6y + 4}{2x + 3y + 2}$$

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2} = 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 2 \Rightarrow dy = 2dx \Rightarrow y = 2x + c$$

وهو الحل العام

رسم (15)

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(2x + y) y' = 4x + 3y$$

كل:

$$y' = \frac{4x + 3y}{2x + y}$$

بالنسبة إلى  $x$

$$c_1 = 0 \quad c_2 = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 + \frac{3y}{x}}{2 + \frac{y}{x}} \Rightarrow dy = \frac{4 + \frac{3y}{x}}{2 + \frac{y}{x}} dx$$

وهي معادلة متجانسة

$$dy = u dx + x du \Leftrightarrow y = ux \Leftrightarrow u = \frac{y}{x}$$

نفرض

$$u dx + x du = \frac{4 + 3u}{2 + u} dx \Rightarrow \left(u - \frac{4 + 3u}{2 + u}\right) dx = -x du$$

$$\frac{2u + u^2 - 4 - 3u}{2 + u} dx = -x du \Rightarrow \frac{u^2 - u - 4}{u + 2} dx = -x du$$

$$\Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{u + 2}{2u + 2} du \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} \frac{2u + 2 + 2}{2u + 2} du \Rightarrow \frac{dx}{x} = \frac{1}{2} du + \frac{1}{2} \frac{2}{2u + 2} du$$

بالمكاملة

$$\ln x = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2} \ln(2u + 2) + \ln c$$

$$\ln x = \frac{1}{2} u + \ln \sqrt{2u + 2} + \ln c \Rightarrow x = c \sqrt{2 \frac{y}{x} + 2} e^{\frac{1}{2} u} \Rightarrow x = c \sqrt{\frac{2y}{x} + 2} e^{\frac{y}{2x}}$$



المعادلة التفاضلية

$$(2x+y-1)dy = (4x-y+7)dx$$

الحل:

$$D_1: 4x - y + 7 = 0$$

$$D_2: 2x + y - 1 = 0$$

$$M(\alpha, \beta) \text{ نقطة تقاطع في المنطقة } \frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$$

$$\begin{cases} 4\alpha - \beta + 7 = 0 \\ 2\alpha + \beta - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha = -1, \beta = 3$$

نفرض

$$dy = dx \Leftrightarrow y = x + 3$$

$$dx = dX \Leftrightarrow x = X + 1$$

نعوض بالمعادلة المعطاة

$$(2X + Y)dy = (4X - Y)dX$$

نقسم على X

$$(2 + \frac{Y}{X})dy = (4 - \frac{Y}{X})dX$$

$$dy = u dX + X du \Leftrightarrow y = uX \Leftrightarrow u = \frac{Y}{X}$$

نعوض

$$(2+u)(u dX + X du) = (4-u)dX$$

$$(2u + u^2 - 4 + u)dX = -(2+u)X du$$

$$-\frac{dX}{X} = \frac{u+2}{u^2+3u-4} du \Rightarrow -\frac{dX}{X} = \frac{\frac{2}{5}}{u+4} du + \frac{\frac{3}{5}}{u-1} du$$

تكامل

$$-\ln X = \frac{2}{5} \ln(u+4) + \frac{3}{5} \ln(u-1) + \ln C$$

$$-\ln X = \frac{2}{5} \ln(u+4) + \frac{3}{5} \ln(u-1) + \ln C_1$$

$$\ln \frac{1}{X^5} = \ln(u+4)^2 + \ln(u-1)^3 + \ln C_1 \Rightarrow \frac{1}{X^5} = C(u+4)^2(u-1)^3$$

$$\frac{1}{X^5} = C(\frac{y}{X} + 4)^2(\frac{y}{X} - 1)^3 \Leftrightarrow$$

$$(y-x-4)^2(y+4x+1)^3 = C_2 \quad \text{وهو}$$



من (3)

نرى أن المعادلة التالية عامة واوجد حلا العام

$$\cos y dx + (2y - x \sin y) dy = 0$$

كل:

$$P(x, y) = \cos y \quad , \quad Q(x, y) = 2y - x \sin y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -\sin y$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\sin y$$

فلاحظ أن

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

فالمعادلة المعطاة عامة

ويوجد حلا العام

$$F'_x = P = \cos y \Rightarrow F(x, y) = \int \cos y dx + \phi(y)$$

$$\Rightarrow F(x, y) = x \cos y + \phi(y) \quad \star$$

نشتغل بالنسبة إلى y

$$F'_y(x, y) = -x \sin y + \phi'(y)$$

ولدينا

$$F'_y = Q = 2y - x \sin y$$

بالمقارنة نجد

$$\phi'(y) = 2y \Rightarrow \phi(y) = y^2$$

فموضد في

$$F(x, y) = x \cos y + y^2$$

فيكون الحل العام هو

$$x \cos y + y^2 = C$$

طريقة ثانية

$$\int P dx = \int \cos y dx = x \cos y + C$$

$$\int Q dy = \int (2y - x \sin y) dy = y^2 + x \cos y + C$$

نأخذ اجتماعي الحدين  $\int P dx$  و  $\int Q dy$  فيكون هو الحل العام أي

$$x \cos y + y^2 = C$$

- ع3 -



مربعين (١٠)   
 رهن أن المعادلة  $e^{2x}(x^2+y^2+x)dx + ye^{2x}dy = 0$    
 تكون:

$$P(x,y) = e^{2x}(x^2+y^2+x) \quad Q(x,y) = ye^{2x}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2ye^{2x}$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2ye^{2x}$$

نلاحظ أن  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$  فالمعادلة تامة

لدينا حل العام

$$F'_x = \frac{\partial F}{\partial x} = P = e^{2x}(x^2+y^2+x) \Rightarrow F(x,y) = \int e^{2x}(x^2+y^2+x)dx + \phi(y)$$

$$= \int x^2 e^{2x} dx + y^2 \int e^{2x} dx + \int x e^{2x} dx + \phi(y)$$

تكامل بالتجزئة (التكامل الأول والثاني)

$$F(x,y) = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} y^2 e^{2x} + \phi(y) \quad *$$

نشتق طرفي المعادلة \* بالنسبة لـ y

$$F'_y = \frac{\partial F}{\partial y} = ye^{2x} + \phi'(y)$$

تقارن مع

$$\phi'(y) = 0 \Rightarrow \phi(y) = C \quad \Leftarrow \frac{\partial F}{\partial y} = Q$$

ويكون الحل العام من \*

$$\frac{1}{2} x^2 e^{2x} + \frac{1}{2} y^2 e^{2x} + C = 0$$

$$x^2 e^{2x} + y^2 e^{2x} = C_1$$

طريقة ثانية

تكامل  $\int P dx$  و  $\int Q dy$  ونأخذ أجهزاء الكل هو الحل العام



(5) تمرين

حل المعادلة التفاضلية بإيجاد عامل التكامل  
 $(x^2 + y^2 + x) dx + y dy = 0$

$$P = x^2 + y^2 + x \quad Q = y$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = 0$$

$$\text{نلاحظ أن } \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ فالمعادلة غير تامة}$$

لإيجاد عامل التكامل

(نحن نعرف أن عامل التكامل تابع لـ  $x$  أو تابع لـ  $y$ )

$$\text{نوجد هل عامل التكامل تابع لـ } y \text{ فقط:}$$

$$\frac{Q'_x - P'_y}{P} = \frac{0 - 2y}{x^2 + y^2 + x}$$

نلاحظ أن عامل التكامل غير تابع لـ  $y$  فقط  
 نفرضه ونحاول إيجاد عامل تكامل تابع لـ  $x$

نوجد إذا عامل التكامل تابع لـ  $x$  فقط

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2y}{y} = 2$$

وهو عامل التكامل تابع لـ  $x$  فقط

$$M = e^{\int 2 dx} = e^{2x}$$

نضرب  $M$  بطرفي المعادلة

$$e^{2x} (x^2 + y^2 + x) dx + y e^{2x} dy = 0$$

وهي معادلة تفاضلية تامة سبق أن وجدنا حلها العام

رين (6)

حل المعادلة التفاضلية التالية بإيجاد عامل التكامل (11)  
 $(y + xy^2) dx - x dy = 0$

$$P = y + xy^2 \quad Q = -x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 1 + 2xy \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -1$$

$$\text{نلاحظ أن } \frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ فالمعادلة غير تامة}$$



لتوجد عامل التكامل  
نوجد إذا كان عامل التكامل تابع لـ  $x$  مثلاً

نلاحظ أن عامل التكامل فرنا هذا

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{1 + 2xy + 1}{-x}$$

نجد إذا كان عامل التكامل تابع لـ  $y$  مثلاً

$$\begin{aligned} \frac{Q'_x - P'_y}{P} &= \frac{-1 - 1 - 2xy}{y + xy^2} = \frac{-2 - 2xy}{y + xy^2} \\ &= \frac{-2(1 + xy)}{y(1 + xy)} = -\frac{2}{y} \end{aligned}$$

نلاحظ أن عامل التكامل تابع لـ  $y$  فقط

$$\mu = e^{-\int \frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln(y)} = e^{\ln \frac{1}{y^2}} = \frac{1}{y^2}$$

نضرب طرفي المعادلة (1) بعامل التكامل  $\frac{1}{y^2}$

$$\frac{y + xy^2}{y^2} dx - \frac{x}{y^2} dy = 0$$

وهي معادلة تامة كلاً

$$F'_x = P_1 = \frac{y + xy^2}{y^2} \Rightarrow F(x, y) = \int \frac{y + xy^2}{y^2} dx + \phi(y)$$

$$F(x, y) = \int \frac{1}{y} dx + \int x dx + \phi(y)$$

$$F(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + \phi(y) \quad (\star)$$

نحقق بالنسبة لـ  $y$

$$F'_y = -\frac{x}{y^2} + \phi'(y)$$

ولدينا

$$F'_y = Q_1$$

بالمقارنة نجد:  $\phi'(y) = 0 \Leftrightarrow \phi(y) = c$  معوض بـ  $x$  نجد

$$\frac{x}{y} + \frac{x^2}{2} + c = 0$$



برين (7)

أوجد عامل تكميل المعادلة التفاضلية  
 $(2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3)dx + (x^2 + y^2)dy = 0$   
 علماً أن تقبل عامل تكميل تابع لـ  $x$  فقط ثم أوجد الكال العام لـ

كل :

$$P = 2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3$$

$$Q = x^2 + y^2$$

$$P'_y = \frac{\partial P}{\partial y} = 2x + x^2 + y^2$$

$$Q'_x = \frac{\partial Q}{\partial x} = 2x$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} \quad \text{ملاحظة أن المعادلة غير تامة}$$

لدينا عامل التكميل التابع لـ  $x$

$$\frac{P'_y - Q'_x}{Q} = \frac{2x + x^2 + y^2 - 2x}{x^2 + y^2} = 1$$

$$\mu = e^{\int dx} = e^x$$

وهو عامل التكميل

نضربه في طرفي المعادلة المطاة فنجد

$$e^x (2xy + x^2y + \frac{1}{3}y^3) dx + e^x (x^2 + y^2) dy = 0$$

$$F'_x = P_1 = 2xye^x + x^2ye^x + \frac{1}{3}y^3e^x \Rightarrow F(x,y) = \int (2xye^x + x^2ye^x + \frac{1}{3}y^3e^x) dx + g(y)$$

$$\Rightarrow F(x,y) = 2y \int x e^x dx + y \int x^2 e^x dx + \frac{1}{3}y^3 \int e^x dx + g(y)$$

$$F(x,y) = 2y(xe^x - e^x) + y(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + \frac{1}{3}y^3e^x + g(y) \quad \text{نكامل بالتجزئة} \quad (*)$$

$$F'_y = 2xe^x - 2e^x + x^2e^x - 2xe^x + 2e^x + y^2e^x + g'(y)$$

$$F'_y = x^2e^x + y^2e^x + g'(y)$$

وعندها

$$g(y) = c \Leftrightarrow g'(y) = 0 \Leftrightarrow F'_y = Q_1$$

فوضد \*

$$F(x,y) = 2y(xe^x - e^x) + y(x^2e^x - 2xe^x + 2e^x) + \frac{1}{3}y^3e^x + c$$

$$yx^2e^x + \frac{1}{3}y^3e^x = c_1$$

ويطى الكال العام بالشكل بعد البسط



- 89 -

المعادلة التفاضلية  $P'_y \neq q'_x$

$$P'_y = 2y$$

$$q'_x = y$$

$$q = xy$$

$$P = x^2 + y^2 + x$$

نلاحظ ان  $x$  لم يوضع في المعادلة

$$\text{المعادلة التفاضلية } (x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$$

$$y^2 x - \frac{1}{2} x^2 = C_1$$

المعادلة التفاضلية

$$\int x dy = xy$$

$$\int (y - 2x^3)dx = yx - \frac{2}{4} x^4$$

$$(y - 2x^3)dx + xdy = 0$$

نلاحظ ان المعادلة التفاضلية

هي من النوع  $Mdx + Ndy = 0$

$$P'_y - q'_x = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^2} = \frac{2}{x^2} \Rightarrow M = e^{\int \frac{2}{x^2} dx} = e^{-\frac{2}{x}} = x^2$$

المعادلة التفاضلية  $P'_y \neq q'_x$  هي من النوع

$$q'_x = -\frac{1}{x^2}$$

$$P'_y = \frac{1}{x^2}$$

$$q = \frac{1}{x}$$

$$P = \frac{y}{x^2} - 2x$$

نلاحظ ان المعادلة التفاضلية

$$\left( \frac{y}{x^2} - 2x \right) dx + \left( \frac{1}{x^2} \right) dy = 0$$

هي من النوع التفاضلية

- 88 -



لتوضيح عامل التكامل

$$\frac{p'_y - q'_x}{q} = \frac{2y - y}{xy} = \frac{1}{x}$$

$$\mu = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$(x^3 + y^2 x + x^2) dx + x^2 y dy = 0$$

$$\int (x^3 + y^2 x + x^2) = x^4 + y^2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\int x^2 y dy = \frac{x^2 y^2}{2}$$

نأخذ اجتماعي الأول

$$x^4 + y^2 \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} = C$$



$$y' + \frac{1}{x}y = \ln x$$

أوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية

الحل:

نوجد عامل التكامل

$$\mu(x) = e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln x} = x$$

نضرب عامل التكامل بطرفي المعادلة

$$x y' + y = x \ln x$$

$$[x y]' = x \ln x$$

$$x y = \int x \ln x dx$$

$$x y = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

$$y = \frac{x}{2} \ln x - \frac{x}{4} + \frac{C}{x}$$

2- أوجد حل المعادلة الخطية التالية

$$y' + \frac{3}{x}y = x^4$$

الحل:

$$\mu(x) = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = e^{\ln x^3} = x^3$$

نضرب بعامل التكامل

$$x^3 y' + 3x^2 y = x^7$$

$$[x^3 y]' = x^7$$

$$x^3 y = \int x^7 dx$$

$$x^3 y = \frac{x^8}{8} + C$$

$$y = \frac{x^5}{8} + \frac{C}{x^3}$$

3- أوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية التالية:

الحل:

$$y' + 3y = e^{2x}$$

$$\mu = e^{\int 3 dx} = e^{3x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$e^{3x} y' + 3e^{3x} y = e^{5x} \Rightarrow [e^{3x} y]' = e^{5x}$$

تكامل

$$e^{3x} y = \int e^{5x} dx \Rightarrow e^{3x} y = \frac{1}{5} e^{5x} + C \Rightarrow y = \frac{1}{5} e^{2x} + C e^{-3x}$$



أوجد حل المعادلة التفاضلية الخطية

$$y' - xy = x$$

$$\mu = e^{\int -x dx} = e^{-\frac{x^2}{2}}$$

طريقة ①

نضرب بمعامل التكامل

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y' - x e^{-\frac{x^2}{2}} y = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[ e^{-\frac{x^2}{2}} y \right]' = x e^{-\frac{x^2}{2}}$$

تكامل

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = \int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

نفرض في التكامل I

$$dt = -x dx \Leftrightarrow t = -\frac{x^2}{2}$$

$$I = \int -e^t dt = -e^t + c = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

نحول \*

$$e^{-\frac{x^2}{2}} y = -e^{-\frac{x^2}{2}} + c$$

$$y = -1 + c e^{\frac{x^2}{2}}$$

طريقة ②

نلاحظ أن هذه المعادلة التفاضلية ذات معولات منفصلة لذلك نكتب بالشكل

$$y' = xy + x$$

$$y' = x(y+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = x(y+1)$$

$$\frac{dy}{y+1} = x dx$$

تكامل

$$\ln(y+1) = \frac{x^2}{2} + \ln c$$

$$\ln \frac{y+1}{c} = \frac{x^2}{2}$$

$$\frac{y+1}{c} = e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow y = c e^{\frac{x^2}{2}} - 1$$



5- أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية التالية:  $y' + y \cot x = 2e^{\cos x}$

الحل: 
$$\mu = e^{\int \cot x dx} = e^{\int \frac{\cos x}{\sin x} dx} = e^{\ln \sin x} = \sin x$$

نضرب طرفي المعادلة بـ  $\sin x$

$$\sin x y' + \cos x y = 2 \sin x e^{\cos x}$$

$$[ \sin x y ]' = 2 \sin x e^{\cos x} \Rightarrow \sin(x) y = \int 2 \sin x e^{\cos x} dx$$

$$\sin(x) y = -2 e^{\cos x} + C$$

$$y = \frac{-2}{\sin x} e^{\cos x} + \frac{C}{\sin x}$$

المثال  
علامة الدالة القائمة هي ذلك في المعادلات الخطية ومما يغلب لدينا في الديمان ولكن كتبته حتى اذا انقضى في الديمان نرغبوا حل وهي سهلة ولكن اول خطوة تجعلك خطية

6- أوجد حل المعادلة التفاضلية  $y'(y + \frac{2x}{y}) = 1$

الحل:

نلاحظ ان هذه المعادلة غير خطية فنكتبها باستعد

$$\frac{dy}{dx} (y + \frac{2x}{y}) = 1$$

$$dy (y + \frac{2x}{y}) = dx$$

$$y + \frac{2x}{y} = \frac{dx}{dy}$$

$$y + \frac{2x}{y} = x'$$

$$x' - \frac{2}{y} x = y \quad (1)$$

وهي معادلة تفاضلية خطية حيث  $x$  هو المتحول المجهول

$$\mu = e^{\int -\frac{2}{y} dy} = e^{-2 \ln y} = \frac{1}{y^2}$$

نضرب باعداد المتكامل

$$\frac{1}{y^2} x' - \frac{2}{y^3} x = \frac{1}{y} \Rightarrow \left[ \frac{1}{y^2} x \right]' = \frac{1}{y} \Rightarrow \frac{1}{y^2} x = \int \frac{1}{y} dy$$

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2} x = \ln y + C \Rightarrow x = y^2 \ln y + C y^2$$



معادلة برنولي

معادلة برنولي  
نوع من المعادلات

$$y' + p(x)y = q(x)y^\alpha$$

نلاحظ أنه إذا زاد  $\alpha$  عن 1  
المعادلة الخطية

إذا  $\alpha = 0$  تصبح المعادلة  $y' + p(x)y = q(x)$  خطية

إذا  $\alpha = 1$  تصبح المعادلة  $y' + [p(x) - q(x)]y = 0$  ذات متغيرات منفصلة

إذا  $\alpha \neq 0, 1$  الحالة العامة

نقسم طرفي المعادلة على  $y^{1-\alpha}$  فتصبح بالشكل

$$y'^{\frac{1}{1-\alpha}} + p(x)y^{\frac{1}{1-\alpha}} = q(x)$$

نفرض  $z = y^{\frac{1}{1-\alpha}}$   $\Leftrightarrow z' = (1-\alpha)y^{-\alpha}y'$  نعوض بـ \*

$$\frac{z'}{1-\alpha} + p(x)z = q(x)$$

وهي معادلة خطية بحال في طريق عامل التكامل

نستطيع فحسب من الأمثلة التالية

$$2y' - \frac{1}{x}y = -y^3 \cos(x)$$

1- اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

هذه معادلة برنولي بحال نقسم الطرفين على  $y^3$

$$2y^{-2}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = -\cos(x)$$

نفرض  $z = y^{-2}$   $\Leftrightarrow z' = -2y^{-3}y'$  ونعوض

$$-z' - \frac{1}{x}z = -\cos x \Rightarrow z' + \frac{1}{x}z = \cos x$$

وهي معادلة خطية لاجداد بحال العام نوجد عامل التكامل

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$xz' + z = x \cos x$$

$$(xz)' = x \cos x$$

$$xz = \int x \cos x dx$$

نقوض  $du = dx \Leftrightarrow u = x$

ونعوض بالتكامل  $v = \sin x \Leftrightarrow dv = \cos x dx$

$$x \bar{z} = x \sin x - \int \sin x dx$$

$$x \bar{z} = x \sin x + \cos x + c$$

$$\bar{z} = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\frac{1}{y^2} = \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$y = \left[ \sin x + \frac{\cos x}{x} + \frac{c}{x} \right]^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' - xy = -x^3 y^2$$

١٢ - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

كل:

في معادلة برنولي لحلا نقسم الطرفين على  $y^2$

$$y' y^{-2} - x y^{-1} = -x^3$$

$$\text{نضع } z = y^{-1} \Rightarrow z' = -y^{-2} y' \text{ ونفوض}$$

$$-z' - xz = -x^3 \Rightarrow z' + xz = x^3$$

$$\mu = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

وحيث خطية

نضرب طرفي المعادلة بمعامل التكامل

$$e^{\frac{x^2}{2}} z' + x e^{\frac{x^2}{2}} z = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[ e^{\frac{x^2}{2}} z \right]' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}} \Rightarrow e^{\frac{x^2}{2}} z = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx \quad \star$$

$$\text{طريقة تغيير المتحول} \quad \text{نضع } t = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow dt = x dx$$

$$I = 2 \int t e^t dt$$

طريقة الجزئية

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^t dt \Rightarrow v = e^t$$

$$I = 2 [t e^t - \int e^t dt] = 2 t e^t - 2 e^t + c \Rightarrow I = x^2 e^{\frac{1}{2} x^2} - 2 e^{\frac{1}{2} x^2} + c$$

نضوض  $\star$

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = x^2 e^{\frac{1}{2} x^2} - 2 e^{\frac{1}{2} x^2} + c$$

$$z = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2} x^2}$$

$$\frac{1}{y} = x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2} x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 2 + c e^{-\frac{1}{2} x^2}}$$



١ - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$y' = y^4 \cos x + y \tan x$$

كل

هي معادلة برنولي فنقسم على  $y^3$

$$y^4 y' - \tan x y^3 = \cos x$$

$$z' = -3y^4 y' \Leftrightarrow z = y^3 \quad \text{نفرض}$$

$$-\frac{1}{3} z' - \tan x z = \cos x$$

$$z' + 3 \tan x z = -3 \cos x$$

$$\mu = e^{\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{-3 \ln(\cos x)} = \frac{1}{\cos^3 x}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$\frac{1}{\cos^3 x} z' + 3 \frac{\sin x}{\cos^4 x} z = \frac{-3}{\cos^2 x}$$

$$\left( \frac{1}{\cos^3 x} z \right)' = \frac{-3}{\cos^2 x}$$

تكامل

$$\frac{1}{\cos^3 x} z = -3 \tan x + c$$

$$z = -3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x$$

$$\frac{1}{y^3} = -3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x$$

$$y = \left[ -3 \sin x \cos^2 x + c \cos^3 x \right]^{-\frac{1}{3}}$$

١٤ - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$x y' + y = y^3$$

كل

هي معادلة برنولي لذلك نقسم على  $y^2$

$$x y^3 y' + y^2 = 1$$

$$z' = -2y^3 y' \Leftrightarrow z = y^2 \quad \text{نفرض}$$

$$\frac{1}{2} x z' - z = -1$$

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{2}{x}$$

هي خطية متجانسة عامل التكامل

$$z' - \frac{2}{x} z = -\frac{2}{x}$$

$$u = e^{-2 \int \frac{dx}{x}} = e^{-2 \ln x} = \frac{1}{x^2}$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$\frac{1}{x^2} z' - \frac{2}{x^3} z = -\frac{2}{x^3}$$

$$\left[ \frac{1}{x^2} z \right]' = -\frac{2}{x^3} \Rightarrow \frac{1}{x^2} z = \frac{1}{x^2} + c \Rightarrow z = 1 + c x^2$$

$$\frac{1}{y^2} = 1 + c x^2 \Rightarrow y^2 = \frac{1}{1 + c x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{1 + c x^2}}$$

طريقة ثانية

ستصلح حلاً بطريقة ثانية لدرجات متكررات فنكتب بالشكل

$$x \frac{dy}{dx} = y^3 - y \Rightarrow \frac{dy}{y^3 - y} = \frac{dx}{x}$$

نفرد الكسور ونكامل

⋮

$$y^2 + x^2 y' = x y$$

١٥- اوجد الكال العام للمعادلة التفاضلية  
كل

$$x^2 y' - x y = -y^2$$

$$y' - \frac{1}{x} y = -\frac{1}{x^2} y^2$$

نقسم على  $y^2$

$$\frac{y^2 y'}{y^2} - \frac{1}{x} \frac{y}{y^2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x^2} \quad \text{حيث } z = \frac{1}{y}$$

$$z' - \frac{1}{x} z = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow z' + \frac{1}{x} z = \frac{1}{x^2}$$

$$u = e^{\int \frac{1}{x} dx} = x$$

نضرب طرفي المعادلة بعامل التكامل

$$x z' + z = \frac{1}{x}$$



$$[xz]' = \frac{1}{x} \quad \text{نكامل}$$

$$xz = \ln x + c$$

$$z = \frac{\ln x}{x} + \frac{c}{x}$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\ln x + c}{x} \Rightarrow y = \frac{x}{\ln x + c}$$

طريقة ثانية

نلاحظ ان المعادلة التفاضلية  $y^2 + x^2 y' = xy$  اذا قسمنا على  $x^2$  يصبح متجانسة

$$\frac{y^2}{x^2} + y' = \frac{y}{x}$$

نفرض  $z = \frac{y}{x} \Leftrightarrow y = xz \Leftrightarrow y' = z + xz'$  ونعوض

$$z^2 + z + xz' = z \Rightarrow xz' = -z^2 \Rightarrow x \frac{dz}{dx} = -z^2$$

$$\frac{dz}{z^2} = -\frac{dx}{x}$$

نكامل

$$-\frac{1}{z} = -\ln x - c$$

$$\frac{1}{z} = \ln x + c$$

$$\frac{x}{y} = \ln x + c \Rightarrow y = \frac{x}{\ln x + c}$$

1.4 - اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية التالية بعد ان تبين ان لا تقبل حلاً خاصاً  $y_1 = e^x$

$$y' = y^2 - 2e^x y + e^{2x} + e^x$$

الحل:

$$\text{نفرض } y_1 = e^x \Rightarrow y_1' = e^x$$

$$e^x = e^{2x} - 2e^{2x} + e^{2x} + e^x$$

محققة

المعادلة هي ريكاني متفرض  $y = e^x + z \Rightarrow y' = e^x + z'$

$$e^x + z' = (e^x + z)^2 - 2e^x(e^x + z) + e^{2x} + e^x$$

$$e^x + z' = e^{2x} + 2ze^x + z^2 - 2e^{2x} - 2ze^x + e^{2x} + e^x$$

$$z' = z^2$$

$$\frac{dz}{dx} = z^2$$

$$\frac{dz}{z^2} = dx \quad \text{تكامل} \Rightarrow -\frac{1}{z} = x + c$$

$$z = -\frac{1}{x+c}$$

$$y - e^x = -\frac{1}{x+c} \Rightarrow y = e^x - \frac{1}{x+c}$$

وهو الحل العام



برين (7)  
وجه الكل العام للمعادلة التفاضلية  
الكل

$$y' - xy = -x^2 y^2 \quad (1)$$

هذه معادلة برنولي كلاً تقسم الطرفين على  $y^2$

$$y' y^{-2} - x y^{-1} = -x^3 \quad (2)$$

$$z' = -y^2 y' \Leftrightarrow z = y^{-1} \quad \text{نقصر}$$

نقوض بـ (2)

$$-z' - xz = -x^3$$

$$z' + xz = x^3 \quad (3)$$

$$u = e^{\int x dx} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

نضرب بـ (3)

$$e^{\frac{x^2}{2}} z' + x e^{\frac{x^2}{2}} z = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$\left[ e^{\frac{x^2}{2}} z \right]' = x^3 e^{\frac{x^2}{2}}$$

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx \quad (4)$$

بطريقة تغيير المتحول حيث نقوض

$$t = \frac{1}{2} x^2 \Rightarrow dt = x dx$$

$$\int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2 \int \frac{1}{2} x^2 e^{\frac{x^2}{2}} x dx = 2 \int t e^t dt$$

$$u = t \Rightarrow du = dt$$

$$dv = e^t \Rightarrow v = e^t$$

$$2 \int x^3 e^{\frac{x^2}{2}} dx = 2t e^t - 2 \int e^t dt = 2 \left[ t e^t - e^t \right] + C$$

$$= 2 \left[ \frac{1}{2} x^2 e^{\frac{1}{2} x^2} - e^{\frac{1}{2} x^2} \right] + C = x^2 e^{\frac{1}{2} x^2} - 2e^{\frac{1}{2} x^2} + C$$

نقوض بـ (4)

$$e^{\frac{x^2}{2}} z = x^2 e^{\frac{1}{2} x^2} - 2e^{\frac{1}{2} x^2} + C$$

$$z = x^2 - 2 + C e^{-\frac{1}{2} x^2} \Rightarrow \frac{1}{y} = x^2 - 2 + C e^{-\frac{1}{2} x^2} \Rightarrow y = \frac{1}{x^2 - 2 + C e^{-\frac{1}{2} x^2}}$$

-101-

نوجد حل المعادلة التفاضلية التالية (1)  $y' - y^2 - \frac{1}{x}y + \frac{3}{x^2} = 0$

علماً اننا تقبل هنا خاصاً وهو  $y_1 = \frac{1}{x}$

كل

المعادلة هي معادلة ريكاتي

نفرض

$$y' = -\frac{1}{x^2} + z' \Leftrightarrow y = \frac{1}{x} + z \Leftrightarrow y = y_1 + z \quad (1)$$

نعوض بـ (1) نجد

$$-\frac{1}{x^2} + z' - \left(\frac{1}{x} + z\right)^2 - \frac{1}{x} \left(\frac{1}{x} + z\right) + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$-\frac{1}{x^2} + z' - \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x}z - z^2 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}z + \frac{3}{x^2} = 0$$

$$z' - \frac{3}{x}z = z^2 \quad (2)$$

وهي معادلة برنولي

لذلك نقسم على  $z^2$

$$z^{-2} z' - \frac{3}{x} z^{-1} = 1 \quad (3)$$

$$(1) \quad u' = -\frac{3}{x} z^{-1} \Leftrightarrow u = z^{-1} \quad \text{نفرض}$$

نعوض بـ (3)

$$-u' - \frac{3}{x}u = 1$$

$$(1) \quad u' + \frac{3}{x}u = -1 \quad (4)$$

وهي معادلة خطية

نوجد عامل التكامل

$$u = e^{\int \frac{3}{x} dx} = e^{3 \ln x} = x^3$$

نضرب بالمعادلة (4)

$$x^3 u' + 3x^2 u = -x^3$$

$$[x^3 u]' = -x^3 \Rightarrow x^3 u = -\int x^3 dx = -\frac{x^4}{4} + C \quad (1)$$

$$u = -\frac{x}{4} + C x^{-3} \quad -102-$$



ميكانيك عام / اي نوع الدرس 8

ومنه

$$\frac{1}{z} = -\frac{1}{4}x + c\bar{x}^3$$

ومنه

$$\frac{1}{y - \frac{1}{x}} = -\frac{1}{4}x + c\bar{x}^3$$

$$y - \frac{1}{x} = \frac{1}{-\frac{1}{4}x + c\bar{x}^3}$$

$$y = \frac{1}{x} + \frac{1}{-\frac{1}{4}x + c\bar{x}^3}$$

وهو الحل العام

طريقة ثانية

نستطيع أن نفرض

$$y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \text{نقدر الخطية مؤرخاً، وكل حل}$$

يرين (4)

$$y' = xy^2 + (1-2x)y + x - 1 \quad (1) \quad \text{وجد الحل العام للمعادلة التفاضلية}$$

$$y_1 = 1 \quad \text{علماً أنه تقبل حل خاصاً هو}$$

الحل:

$$\text{المعرب التحويل} \quad (1) \quad y = y_1 + \frac{1}{z} \quad \text{الذي يرد المعادلة (1) إلى معادلة خطية}$$

$$y' = -\frac{z'}{z^2} \quad \Leftrightarrow \quad y = 1 + \frac{1}{z}$$

مفوض (11)

$$-\frac{z'}{z^2} = x\left(1 + \frac{1}{z}\right)^2 + (1-2x)\left(1 + \frac{1}{z}\right) + x - 1$$

$$-\frac{z'}{z^2} = x + \frac{2x}{z} + \frac{x}{z^2} + 1 + \frac{1}{z} - 2x - \frac{2x}{z} + x - 1$$

$$-\frac{z'}{z^2} = \frac{x}{z^2} + \frac{1}{z} \quad \Rightarrow \quad -z' = x + z \quad \Rightarrow \quad \boxed{z' + z = -x} \quad (2)$$

وهي معادلة خطية كلا توجد عامل التكامل

103



$$\mu = e^{\int dx} = e^x \quad (1)$$

نضرب المعادلة (2)

$$e^x z' + e^x z = -x e^x$$

$$[e^x z]' = -x e^x$$

$$e^x z = -\int x e^x dx \quad (2)$$

$$e^x z = -x e^x + e^x + C$$

$$z = -x + 1 + C e^{-x}$$

ولكن نبدل بالفريل  $y = 1 + \frac{1}{z}$

$$y = 1 + \frac{1}{1 - x + C e^{-x}}$$

$$y = \frac{z - x + C e^{-x}}{1 - x + C e^{-x}} \quad (1)$$

وهذا كل العام للمعادلة المعطاة



السؤال الأول  
الصفحة الثانية

$$x^2 + y^2 = R^2$$

المساحة المحيطة بالدائرة

المساحة المحيطة بالدائرة هي

$$y = R \sin t$$

$$x = R \cos t$$

$$0 \leq t \leq 2\pi$$

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

$$y'(t) = R \cos t$$

$$x'(t) = -R \sin t$$

$$\sqrt{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} = R$$

$$L = R \int_0^{2\pi} dt = R [t]_0^{2\pi} = 2\pi R$$